Ensembles

Réponses

I- Généralités

1

a) Faux
b) Vrai
c) Faux
d) Vrai
e) On ne peut pas savoir
f) Vrai
g) Faux

2

a) $\{1;2;3;4;6;12\}$

b) C'est un ensemble infini. Il est donc impossible de l'écrire en extension.

c) $\{1;2\}$. La formulation de la question était ambiguë : est-ce l'ensemble des entiers qui sont chacun à la fois diviseur de 4 et de 6, ou bien l'ensemble des entiers qui sont diviseurs de 4 et de ceux qui sont diviseurs de 6 ? La première interprétation est privilégiée en mathématiques. La seconde produirait la réponse : $\{1;2;3;4;6\}$

Soyez très rigoureux avec la « syntaxe », c'est-à-dire avec l'utilisation des signes mathématiques. Il faut bien séparer les éléments par des points-virgules.

Question parfois posée : « faut-il forcément écrire les éléments par ordre croissant ? ». Non, puisque dans un ensemble, l'ordre des éléments n'a aucune importance.

3

a) $\{3 ; 6 ; 15 ; 30]$

b) C'est l'ensemble les multiples de 15. Il y en a une infinité. Impossible, donc de l'écrire en extension.

c) $\{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ; 25 ; 50 ; 100 \}$

4

a) L'ensemble des puissances de deux jusqu'à 2^9. Ou encore : l'ensemble des diviseurs de 512.

b) L'ensemble des carrés (d'entiers naturels) jusqu'au carré de 14.

c) L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 50.

d) L'ensemble des diviseurs de 30.

5

a) Vrai
b) Faux
c) Faux
d) Vrai
e) Faux
f) Faux
g) Faux
h) Faux
i) Vrai
j) Faux
k) Vrai
l) Faux
m) Vrai

6

a) 3

b) 1

c) 8

d) 1

e) 2

7

a) $(a ; a)$, $(a ; b)$, $(a ; c)$, $(b ; a)$, $(b ; b)$, $(b ; c)$, $(c ; a)$, $(c ; b)$, $(c ; c)$.

b) $\{a ; b\}$, $\{a ; c\}$, $\{b ; c\}$.

8

a) $(a ; a)$, $(a ; b)$, $(a ; c)$, $(a ; d)$,
$(b ; a)$, $(b ; b)$, $(b ; c)$, $(b ; d)$,

$(c\,;a)$, $(c\,;b)$, $(c\,;c)$, $(c\,;d)$,
$(d\,;a)$, $(d\,;b)$, $(d\,;c)$, $(d\,;d)$.

b) $\{a\,;b\}$, $\{a\,;c\}$, $\{a\,;d\}$,
$\{b\,;c\}$, $\{b\,;d\}$,
$\{c\,;d\}$.

c) 25.

d) 10.

9

a) 100

b) 45

n étant un entier naturel, exprimer en fonction de n :

c) n^2

d) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

10

a) $(a;a;a)$, $(a;a;b)$, $(a;b;a)$, $(a;b;b)$,
$(b;a;a)$, $(b;a;b)$, $(b;b;a)$, $(b;b;b)$.

b) $\{a;b;c\}$, $\{a;b;d\}$, $\{a;c;d\}$, $\{b;c;d\}$.

11

a) 10^3

b) 10^5

c) $10\times9\times8\times7\times6 = 30\,240$

II- La relation d'inclusion

12

a) Faux
b) Vrai
c) Vrai
d) Faux
e) Vrai
f) Vrai
g) Faux
h) Vrai

13

a) Vrai
b) Faux
c) Faux
d) Vrai
e) Faux

14

a) Vrai
b) Faux
c) Faux
d) Vrai
e) Faux

15

Oui, mais il reste à trouver un exemple.

16

a) $\{a\}$, par exemple.

b) $\{a;b\}$, par exemple.

c) Oui : A.

d) Non.

17

a) Il y a 4 sous-ensembles de E. Attention à ne pas oublier l'ensemble vide, ni l'ensemble E lui-même : $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a;b\}$.

a) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a;b\}$, $\{a;c\}$, $\{b;c\}$, $\{a;b;c\}$.

18

$\varnothing$, $\{d\}$, $\{c\}$, $\{c;d\}$, $\{b\}$, $\{b;d\}$, $\{b;c\}$, $\{b;c;d\}$, $\{a\}$, $\{a;d\}$, $\{a;c\}$, $\{a;c;d\}$, $\{a;b\}$, $\{a;b;d\}$, $\{a;b;c\}$, $\{a;b;c;d\}$.

a) 32.

b) 2^{10}.

c) 2^n.
Attention à ne pas raisonner par *induction*, c'est-à-dire à ne pas

« deviner » une loi générale à partir de quelques cas particuliers : il faut un raisonnement (voir le corrigé). Comme dans les autres exercices de dénombrement, il s'agit de bien organiser les choses que l'on doit compter. Ici, on est tenter de regrouper les sous-ensembles par leur nombres d'éléments (l'ensemble vide, puis les singletons, puis les paires, puis les « triades », etc.). C'est une mauvaise idée.

Erreur courante : $1+n+\dfrac{n^2+n}{2}$: l'auteur de cette erreur a compté l'ensemble vide, les singletons et les paires, mais a négligé les éventuels triplets, quadruplets et le reste.

III- Opérations sur les ensembles

20

a) $\{a;b;c;d\}$

b) $\{a;b;c\}$

c) $\{c\}$

d) $\varnothing$ (on rencontre parfois la réponse : « $\{\varnothing\}$ ». Or cet ensemble n'est pas l'ensemble vide, mais un singleton.)

e) $\{a;c\}$

f) $\varnothing$

g) $\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{c\};\{a;b\};\{a;c\};\{b;c\};\{a;b;c\}\}$

Être rigoureux avec la syntaxe : ne pas oublier les grandes accolades qui englobent le tout.

21

Réponses non données.

22

a) $\{(u;a);(u;b);(u;c);(v;a);(v;b);(v;c)\}$

b) $\{(u;u);(u;v);(v;u);(v;v)\}$

c) $\{(u;u;u);(u;u;v);(u;v;u)(u;v;v);(v;u;u);(v;u;v);$
$(v;v;u);(v;v;v)\}$

23

Réponses non données.

24

7

25

7

26

300

27

2^{10}

28

a) $\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$

b) $\text{Card}(B)-\text{Card}(A)$

c) $\text{Card}(A)\times\text{Card}(B)$

29

a) $[\text{Card}(A)]^2$

b) $[\text{Card}(A)]^5$

c) $[\text{Card}(A)]^n$

d) $2^{\text{Card}(A)}$

IV- Les ensembles de nombres

1- Les grandes catégories de nombres

Cocher les cases pour répondre.

$\in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
0,2			✓	✓	✓
−1		✓	✓	✓	✓
1,34cm					
3,14			✓	✓	✓
π					✓
$\frac{1}{8}$			✓	✓	✓
$\frac{1}{7}$				✓	✓
0,4444…				✓	✓
0,9999…	✓	✓	✓	✓	✓

31

$\in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{2}$					✓
$\sqrt{4}$	✓	✓	✓	✓	✓
1 cm					
$\frac{2}{6}$				✓	✓
$\frac{3}{6}$			✓	✓	✓

32

$A = \frac{2}{11}$

33

$B = \frac{1}{333}$

2- L'irrationalité

34

a) Soient deux nombres rationnels. Par définition, on peut les écrire sous forme de fraction, par exemple $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, où a, b, c et d sont des entiers. « Calculons » alors leur somme :

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$. Ainsi, on a mis cette somme sous la forme d'une fraction (le numérateur et le dénominateur sont bien des entiers). Elle est donc rationnelle à son tour.

b) Démontrons la *contraposée*, à savoir : si un nombre a un double rationnel, alors il est lui-même rationnel. Cela revient à démontrer que la moitié d'un rationnel est elle-même rationnel. Considérons un nombre rationnel. Il s'écrit alors $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers.

Sa moitié s'écrit $\frac{\frac{a}{b}}{2}$, qui est égal à $\frac{a}{2b}$…

c) $\sqrt{2}$, par exemple, est irrationnel et a pour carré 2, qui est entier donc rationnel.

d) Supposons qu'un irrationnel r ait une racine rationnelle. Alors il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{r}=\frac{p}{q}$. Donc $r=\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}$. r serait donc rationnel, ce qui contredirait l'hypothèse de départ…

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une somme de deux irrationnels qui est elle-même irrationnelle, mais $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)$ est une somme de deux irrationnels qui est rationnelle.

35

Démonstration par l'absurde. Supposons qu'au contraire, $3\sqrt{2}+1$ soit rationnel. Il existerait alors deux entiers p et q tels que $3\sqrt{2}+1=\frac{p}{q}$.

Et alors on aurait : $3\sqrt{2}=\frac{p}{q}-1$

donc : $3\sqrt{2}=\frac{p}{q}-\frac{q}{q}$

donc : $3\sqrt{2}=\frac{p-q}{q}$

donc : $\sqrt{2}=\frac{p-q}{3q}$

Alors $\sqrt{2}$ serait rationnel, ce qui est faux.

3- Les intervalles

36

a) Vrai
b) Faux
c) Vrai
d) Faux
e) Vrai
f) Faux
g) Vrai
h) Faux

37

a) $]-\infty;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}$)

b) $[0;1]$

c) $]-1;3]$

d) $\varnothing$

e) $]-2;1]\setminus\{-1\}$

38

a) $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b) $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

c) $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

39

Réponses non données.

40

Réponses non données.

V- Exercices supplémentaires

41

a) $\{a;b\}$

b) $\{a\}$

c) $\{a;b\}$

d) $\{a;b\}$

e) $\varnothing$

f) $\{a\}$

g) $\{(a;a);(b;a)\}$

h) $\{(a;a);(a;b)\}$

i) $\{(a;a)\}$

j) $\{\varnothing;\{a\}\}$

42

a) $]-2;2[$

b) $[-2;0[\cup]0;2[$

c) $]1;2[\cup]2;3]$

d) $]-2;2[$

e) $[-1;1]$

f) $[-3;-2[\cup]2;3]$

g) $[-3;-1[\cup[1;3]$

h) $[0;1]$

i) $\varnothing$ (L'ensemble vide est considéré comme un intervalle.)

j) $]-\infty;-1[\cup]-1;1[$

43

a) 2

b) 6

c) 6

44

a) V
b) F
c) F
d) V
e) F
f) V
g) F

h) V
i) F
j) F
k) V
l) V

45

a) -1

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

e) $(-1;1)$

Ce ne sont que des exemples : il y a dans chaque cas une infinité de réponses possibles.

46

a) $\{\varnothing\}$

b) $\{\varnothing;\{\varnothing\}\}$

c) $\{\varnothing;\{\varnothing\};\{\{\varnothing\}\};\{\varnothing;\{\varnothing\}\}\}$

VI- Approfondissements

47

a) Faux
b) Vrai
c) Faux
d) Vrai
e) Vrai
f) Vrai

48

La fonction f définie par : pour tout n entier naturel, $f(n)=n+1$.

À chaque élément de $\mathbb{N}$, on associe ainsi son successeur, qui est dans $\mathbb{N}^*$. Si l'on part d'un élément de $\mathbb{N}^*$, on peut retrouver son *antécédent* (voir chapitre *Fonctions I*), en lui soustrayant 1.

49

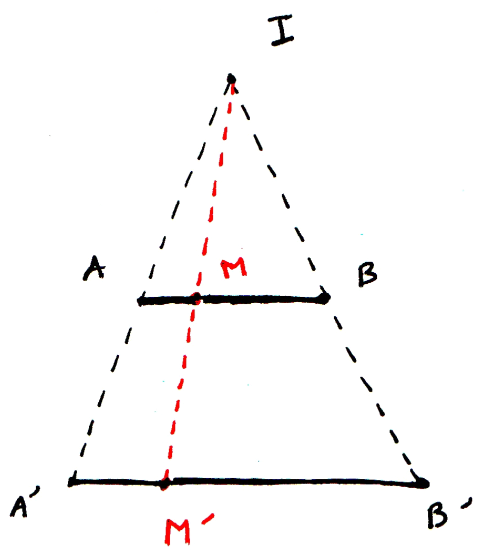
La fonction f définie par : pour tout n entier naturel, $f(n)=2n$.

A chaque élément de $\mathbb{N}$, on associe son double, qui est pair. On peut revenir en arrière en divisant par 2.

50

Plaçons les segments « parallèlement » l'un à l'autre (mais pas sur une même droite). Si on les note $[AB]$ et $[A'B']$, on peut tracer les droites (AA') et (BB'), qui se couperont en un point I. Soit M un point quelconque du segment $[AA']$, décidons que son image M' sera le point d'intersection entre (IM) et $[BB']$.

On a ainsi associé deux à deux chaque point du premier segment avec chaque point du second de façon bijective.



51

Oui, on peut ! Aide : mettez en bijection le segment avec un demi-cercle (privé lui aussi de ses extrémités) ; puis le demi-cercle avec la droite. Tout ceci par des constructions géométriques.

Il n'y a donc pas plus de points sur une droite que sur un segment, si petit soit-il. Étonnant, non ?

Vous allez peut-être croire qu'en définitive, tous les infinis se valent. Mais c'est faux : par exemple, nous démontrerons plus loin que l'on ne peut pas mettre en bijection $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.

52

D'abord, un peu de solennité. Cantor a réfléchi à cette question pendant plus de trois ans, si l'on en croit du moins ce qu'il dit dans ses lettres à son ami mathématicien Dedekind. Il pose la question à Dedekind dans une lettre du 5 janvier 1874 : « Est-ce qu'une surface (par exemple un carré, frontière comprise) peut être mise en relation univoque avec une courbe (par exemple un segment de droite extrémités comprises), de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde un point de la courbe, et réciproquement à tout point de la courbe un point de la surface. »

Drôle de question, car tout porte à croire, dans un premier temps, qu'il n'existe <u>pas</u> de bijection entre une ligne et une surface. S'il existait par exemple une bijection entre une droite et un plan, cela voudrait dire que pour repérer un point dans le plan, un seul nombre (au lieu des deux que sont l'abscisse et l'ordonnée) est nécessaire. Ça se saurait, non ?

<u>Et pourtant, c'est possible !</u> Simplement la bijection en question n'est pas *continue*, c'est-à-dire qu'un déplacement même infime du point de départ sur la droite entraîne des déplacement chaotiques (avec des sauts) du point qui lui correspond dans le plan. Il n'y a pas, notamment de construction géométrique qui puisse décrire cette bijection à l'instar de celles des deux exercices précédents.

Peu après avoir proposé sa solution (en 1877) à Dedekind, Cantor lui écrira : « ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi si inattendu, si nouveau, que je ne pourrai pour ainsi dire pas arriver à une certaine tranquillité d'esprit avant que je n'aie reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : *Je le vois, mais je ne le crois pas* [en français dans le texte]. »

L'exercice proposé vous demande donc de trouver un résultat qu'un très grand mathématicien a mis plus de trois ans à trouver. Nous allons peut-être vous aider un tantinet.

Considérons un segment et un carré (plein) dont le côté a même longueur que le segment. On va prendre cette longueur pour unité. Avec la notion de *coordonnées*, on peut associer à chaque point du carré un couple de réels de l'intervalle $[0;1]$. Et bien entendu, on peut associer à chaque point du segment un unique réel de ce même intervalle. Il s'agit donc de mettre en bijection $[0;1]\times[0;1]$ avec $[0;1]$.

Prenons un couple $(a;b)$ de réels appartenant à $[0;1]\times[0;1]$. Il va s'agir de « condenser » les deux nombres a et b en un seul, mais attention, sans perte d'information. Il faut qu'à partie du nombre d'arrivée on puisse retrouver les <u>deux</u> nombres d'origine. Comment faire entrer dans un seul nombre l'information de deux nombres ? On ne peut pas utiliser une opération classique comme l'addition ou la multiplication, car il y a une infinité de façons d'obtenir une même somme (ou un même produit) avec deux termes. La bijection ne peut même être formée par aucune expression d'algèbre employant les notations que vous connaissez. Il faut trouver autre chose. Allez, encore un petit coup de pouce : pensez à l'écriture décimale de vos nombres. L'idée centrale de la démonstration tient en trois mots.

Maintenant, c'est à vous de jouer. Attendez au moins une semaine avant de consulter le corrigé.

53

a) Démontrons par l'absurde qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0;1[$. Supposons que l'on puisse, à chaque entier naturel, associer un élément de l'intervalle $]0;1[$, de façon que <u>tous</u> les réels de cet intervalle soient ainsi <u>numérotés</u>. Alors, Cantor démontre par un argument célèbre appelé « l'argument diagonal » qu'il restera toujours des réels de $]0;1[$ qui ne pourront être atteints. Comme dans l'exercice précédent, on travaille sur les écritures décimales :

(...)

b) Il s'agit du théorème de Cantor-Bernstein. Un jour, peut-être, je mettrai l'une de ses démonstrations sous une forme accessible à des élèves de seconde (très motivés, quand même).

c) Il y a une infinité de cardinaux infinis, mais elle est « tellement immense » qu'on ne peut pas parler de l'*ensemble* de ces cardinaux (cela aboutirait à un paradoxe du genre paradoxe de Russel).

d) Question indécidable. L'*axiome du continu* décide qu'il n'y en a pas. Comme c'est un axiome, on pourrait aussi bien décider qu'il y en a.